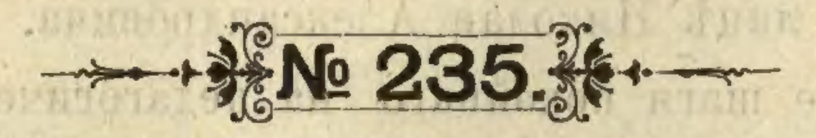
XX Сем. 20-го Марта 1896 г. № 7.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.







## Н. А. Сорокинъ.

**(Некрологъ).**

5-го іюня внезапно скончался преподаватель математики и физики Кіево-Печерской гимназіи Николай Александровичъ Сорокинъ. Покойный всегда живо интересовался „Вѣстникомъ Опытной Физики и Элементарной Математики“, принималъ самъ участіе въ этомъ изданіи, помѣщая здѣсь свои статьи по теоріи чиселъ, и всячески старался заохотить къ чтенію этого журнала своихъ учениковъ. Все это налагаетъ на насъ нравственную обязанность посвятить воспоминанію о Николаѣ Александровичѣ нѣсколько строкъ на страницахъ любимаго имъ изданія.

Николай Александровичъ—сынъ Тамбовскаго купца, родился въ Тамбовѣ 22 ноября 1861 года. Здѣсь же въ родномъ городѣ онъ получилъ и первоначальное воспитаніе въ Тамбовской гимназіи, которую окончилъ въ 1881 г., и въ томъ же году поступилъ въ С.-Петербургскій университетъ на 1-ый курсъ физико-математическаго факультета. Въ 1885 году Николай Александровичъ окончилъ математическій факультетъ со степенью кандидата и 7 ноября того же года назначенъ преподавателемъ математики въ только что открывшуюся тогда Кіево-Печерскую гимназію, въ которой и состоялъ преподавателемъ до самой смерти.

Мы помнимъ Николая Александровича съ перваго года его преподавательской дѣятельности, помнимъ мы съ какой неутомимой энергіей покойный взялся за пополненіе тѣхъ пробѣловъ, которые незамедлили обнаружиться въ первые моменты его учительской службы, памятны намъ бесѣды до поздняго часу съ покойнымъ нашимъ другомъ какъ о тѣхъ педагогическихъ и методическихъ недочетахъ, съ которыми сталкивается всякій начинающій учитель, такъ и о тѣхъ пособіяхъ по педагогикѣ и дидактикѣ, знакомство съ которыми обязательно для стремящагося учить другихъ, помнимъ мы и ту горячность, съ какой покойный всегда обрушивался на всякую школьную рутину, и потому душевно скорбимъ о той крупной потерѣ, какую понесла наша педагогическая семья въ лицѣ Николая Александровича.

Уже первые шаги покойнаго на педагогическомъ поприщѣ ясно указывали, что онъ всѣмъ сердцемъ преданъ этому дѣлу, а его солидная математическая подготовка и выдающіяся способности служили залогомъ того, что въ лицѣ Н. А. растетъ и крѣпнетъ выдающаяся педагогическая сила. Какъ преподаватель математики Н. А. особенное значеніе въ дѣлѣ умственнаго развитія учащихся придавалъ геометріи и съ этою цѣлью на первыхъ порахъ удѣлялъ не мало времени на знакомство учащихся со способами рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе, но затѣмъ, уступая школьнымъ требованіямъ, онъ сталъ самъ составлять такія задачи на вычисленіе, въ которыхъ участвовало бы построеніе, какъ вспомогательное средство для простоты рѣшенія задачи. Мы знаемъ, что Н. А. составилъ достаточное количество такихъ задачъ по геометріи и тогда же указывалъ намъ въ личной бесѣдѣ, насколько упрощается рѣшеніе многихъ изъ нихъ, если пользоваться для этого тригонометрическими функціями.

Такимъ образомъ матерьялъ для „Сборника геометрическихъ задачъ съ примѣненіемъ тригонометріи“ былъ готовъ у Н. А., если не ошибаемся, въ 1888 г.; вотъ почему, когда 12-го марта 1891 г. было утверждено Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія правило о назначеніи для письменнаго испытанія зрѣлости по геометріи такихъ задачъ, въ условія которыхъ входятъ тригонометрическія данныя, покойный немедленно приступилъ къ изданію составленныхъ имъ задачъ, переработавъ ихъ въ указанномъ Министерствомъ смыслѣ.

Изданный Н. А. задачникъ въ короткое время выдержалъ 4 изданія, отчасти благодаря тому, что онъ тогда явился какъ необходимое и на первыхъ порахъ единственное пособіе для подготовки учениковъ VIII класса къ испытаніямъ, но главнымъ образомъ благодаря въ высшей степени талантливо составленнымъ задачамъ. Въ часы досуга покойный съ особеннымъ увлеченіемъ занимался теоріей чиселъ и оставилъ по этому вопросу слѣдующія работы: 1) О системахъ счисленія, 2) Новый способъ повѣрки ариѳметическихъ дѣйствій, 3) Рѣшеніе сравненій 3-ей степени съ модулемъ простымъ и модулемъ $2^n$, 4) Рѣшеніе срав-

ненiй 2-ой степени съ модулемъ простымъ и 5) Къ вопросу о сравненiи комплексныхъ чиселъ. Выдержки изъ послѣдней работы покойный читалъ въ настоящемъ году въ засѣданiяхъ Физико-Математическаго Общества, членомъ котораго онъ состоялъ почти съ года открытiя Общества. Въ предстоящемъ учебномъ году покойный по предложенiю Физико-Математическаго Общества намѣренъ былъ прочесть рядъ публичныхъ лекцiй по ариѳметикѣ въ связи съ теорiей чиселъ.

Знаемъ мы, что завѣтной мечтой покойнаго была профессорская карьера, онъ постоянно говорилъ и думалъ о предстоящемъ испытанiи на званiе магистра, даже настоящiе продолжительные лѣтнiе каникулы онъ намѣренъ былъ употребить на подготовку къ испытанiю, но неумолимая и неожиданная смерть уничтожила всякiя начинанiя. Смерть Н. А. тяжело поразила всѣхъ знавшихъ его; еще недавно мы видѣли его полнымъ силъ и энергiи, въ жизнерадостномъ настроенiи, собирающимся съ семьей провести лѣто въ Крыму, и вдругъ его не стало!

Самъ покойный 30-го мая разсказывалъ своимъ сослуживцамъ, что онъ наканунѣ гулялъ въ саду и почувствовалъ какой то уколъ въ носъ, подобно укушенiю комара; на слѣдующiй день носъ сильно распухъ, затѣмъ опухоль распространилась по всему лицу, перешла внизъ на шею и грудь, образовалось рожистое воспаленiе легкихъ, отъ котораго 5-го iюня и воспослѣдовала смерть. Въ лицѣ покойнаго общество и наша педагогическая семья потеряли честнаго и неутомимаго труженика, учащееся юношество лишилось искренно и горячо любившаго ихъ наставника, сослуживцы потеряли въ немъ веселаго, остроумнаго собесѣдника и вѣрнаго товарища, наконецъ, близко знавшiе Николая Александровича лишились въ немъ лучшаго, искренно преданнаго друга. Миръ праху твоему честный труженикъ и дорогой другъ!

*З. Архимовичъ* (Кiевъ).

# ОЧЕРКЪ
## геометрической системы Лобачевскаго.

*(Продолженiе*).*

Для вычисленiя поверхности тѣла вращенiя удобно пользоваться выраженiемъ нѣсколько иного вида.

Возращаясь къ чертежу (27) и опредѣляя, какъ и тамъ, положенiе точки M на поверхности координатами $\zeta$ и $\vartheta$, мы замѣтимъ, что элементъ поверхности $LMM''M'$ соотвѣтствуетъ нарощенiю этихъ коорди-

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики" №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195, 196, 198, 199, 201, 202, 203, 206, 207, 209, 214, 216, 222, 225 и 234.

натъ на $d\zeta$ и $d\vartheta$. Площадь этого элемента равна $MM''.M'M''$. Какъ мы уже видѣли (ур. 12), $MM''=\cot g\varrho' d\vartheta$, если $d\vartheta$ выражено въ линейной мѣрѣ, и $M'M''=\frac{d\zeta}{\sin\varrho'\sin\varphi}$, гдѣ $\varrho$ радіусъ параллели, а $\varphi$ уголъ $M'M''P$ между этимъ радіусомъ и меридіаномъ. Поэтому

$$d^2\sigma=\frac{\cot g\varrho'}{\sin\varrho'\sin\varphi}\,d\zeta\,d\vartheta.$$

Такъ какъ $\varrho$ и $\varphi$ остаются постоянными на всей параллели, то очевидно поверхность зоны, заключающейся между двумя безконечно близкими параллелями

$$d\sigma=\frac{2\pi\cos\varrho' d\zeta}{\sin^2\varrho\sin\varphi}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ шаромъ, то не трудно выразить $\varrho$ и $\varphi$ въ зависимости отъ $\zeta$. Въ самомъ дѣлѣ, если O есть центръ шара, R его радіусъ, то изъ треугольника $OPM''$ имѣемъ

ур VII
$$\sin\varrho'=\frac{\sin R'}{\sin\zeta'},$$

если считать разстоянія $\zeta$ отъ плоскости большого круга.

ур. VIII
$$\sin\varphi=\cos(PM''O)=\frac{\cos\varrho'}{\cos R'}.$$

Отсюда

$$d\sigma=\frac{2\pi\cos R'\sin^2\zeta' d\zeta}{\sin^2 R'}$$

или ввиду соотношенія LXI

$$d\sigma=-\frac{2\pi\cos R'\sin\zeta' d\zeta'}{\sin^2 R'}.$$

Интегрируя это выраженіе отъ $\zeta'_0$ до $\zeta'_1$, найдемъ поверхность зоны, заключающейся между двумя параллелями, которыя отстоятъ отъ центра на разстоянія $\zeta_1$ и $\zeta_0$:

$$\sigma=\frac{2\pi\cos R'}{\sin^2 R^2}(\cos\zeta'_1-\cos\zeta'_0).$$

Полагая здѣсь, во первыхъ, $\zeta_1=R$ и $\zeta_0=0$, получимъ поверхность одного полушарія.

Поэтому поверхность шара

$$\Sigma=4\pi\cot g^2 R'.$$

Во вторыхъ, полагая $\zeta_1=R$ и оставляя $\zeta_0$ произвольнымъ, найдемъ поверхность сферическаго сегмента, основаніе котораго отстоитъ отъ центра на разстояніе $\zeta_0$:

$$\tau = \frac{2\pi \cos R'}{\sin^2 R'} (\cos R' - \cos \zeta'_0).$$

Обратимся теперь къ вычисленію объемовъ.

Если на фиг. 28 отложимъ $Mb = Nc = Pd = Qa = z$ и $M'M = N'N = P'P = Q'Q = dz$, то получимъ элементъ объема въ видѣ безконечно малаго параллелепипеда $MNPQM'N'P'Q'$, объемъ котораго, какъ мы видѣли въ началѣ настоящей главы (пунктъ С), пропорціоналенъ произведенію трехъ его измѣреній. Совершенно такъ же, какъ мы выше вычисляли $AB'$ и $AC'$, мы найдемъ выраженія для $QP = \frac{dy}{\sin z'}$ и для $MQ = \frac{dx}{\sin y' \sin z'}$. Отсюда элементъ объема

$$d^3 v = \mu \frac{dx dy dz}{\sin y' \sin^2 z'},$$

гдѣ $\mu$ нѣкоторая постоянная — коэффиціентъ пропорціональности, который конечно зависитъ отъ выбора единицы объема; мы оставимъ его покамѣстъ безъ ближайшаго опредѣленія.

Отсюда находимъ объемъ цилиндра*) $abcdAB'C'D'$ (который отличается отъ объема цилиндра $abcdABCD$ лишь на величину безконечно малую по отношенію къ $d^2v$):

$$d^2 v = \frac{\mu dx dy}{\sin y'} \int_0^z \frac{dz}{\sin^2 z'} = -\frac{\mu dx dy}{\sin y'} \int_{\frac{\pi}{2}}^{z'} \frac{dz'}{\sin^3 z'},$$

гдѣ координата $z$ принадлежитъ точкѣ на поверхности, (т. е. въ данномъ случаѣ $z = Aa$).

Какъ извѣстно,

$$\int \frac{dz'}{\sin^3 z'} = \frac{1}{2} \lg\operatorname{tg} \frac{1}{2} z' - \frac{1}{2} \frac{\cos z'}{\sin^2 z'} + C.$$

Но по формуламъ XX $a$) и XVIII $a$) имѣемъ:

$$\lg\operatorname{tg} \frac{1}{2} z' = -z \text{ и } \frac{\cos z'}{\sin^2 z'} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg}(2z)',$$

а потому

---

*) Подъ цилиндрической поверхностью въ пространствѣ Лобачевскаго разумѣютъ поверхность, описываемую прямолинейной образующей, которая движется, опираясь на плоскую директриссу и оставаясь перпендикулярной къ ея плоскости. Впрочемъ такую поверхность иногда называютъ также *расходящейся* цилиндрической поверхностью въ отличіе отъ *сходящейся*, которая образуется прямой, движущейся параллельно самой себѣ. Подъ *цилиндромъ* мы будемъ разумѣть тѣло, ограниченное съ боковъ цилиндрической поверхностью, снизу плоскостью дикертриссы, сверху—произвольной поверхностью.

$$d^2v = \frac{\mu dxdy}{2.\sin y'}\left(z + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2z)'\right) = \frac{\mu d^2s}{2}\left(z + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2z)'\right),$$

гдѣ $d^2s$ поверхность основанія цилиндра. Если мы примѣнимъ эту формулу къ вычисленію объема цилиндра, ограниченнаго сверху поверхностью равныхъ разстояній, то $z$ представляетъ собой постоянную величину $h$ и поэтому:

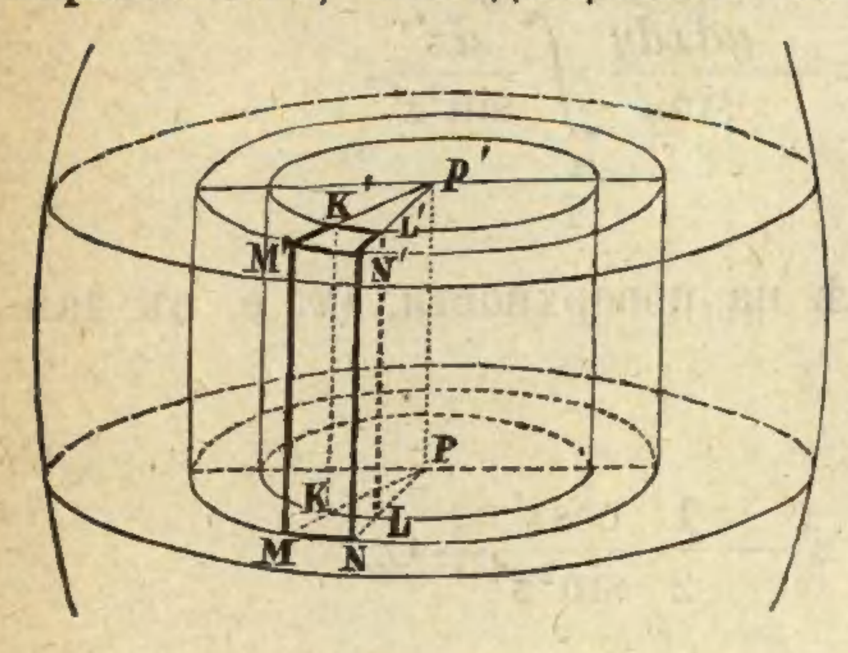
$$v = \frac{1}{2}\mu S\left(h + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2h)'\right).$$

Замѣтимъ, что выраженіе

$$h + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2h)' = \frac{e^{2h} - e^{-2h}}{4} + h$$

постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ $h$ и притомъ измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$; поэтому при нѣкоторомъ вполнѣ опредѣленномъ значеніи $h = h_0$ это выраженіе равняется 2. Объемъ цилиндра съ основаніемъ равнымъ плоскостной единицѣ, и высотой, равной $h_0$, выразится числомъ $\mu$. Если поэтому объемъ этого цилиндра принять за единицу, то коэффиціентъ $\mu$ приводится къ 1. Такой выборъ единицы мы и предполагаемъ въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Переходя теперь къ вычисленію объемовъ тѣлъ вращенія, опредѣлимъ объемъ слоя, заключеннаго между двумя безконечно близкими параллелями, находящимися на разстояніи $d\zeta$ другъ отъ друга (фиг. 33). Разобьемъ для этого этотъ объемъ на безконечно малыя кольца цилиндрическими поверхностями, имѣющими PP' общею осью. Одно изъ такихъ колецъ изображено на чертежѣ. Это кольцо мы снова разобьемъ на элементы плоскостями MM'P'P, NN'P'P и т. д. образующими безконечно малые углы $d\vartheta$. Объемъ элемента MKLN M'K'L'N' равенъ, очевидно, MK.KL.KK'. Обозначая черезъ $r$ внутренній радіусъ PK кольца, мы будемъ имѣть:



Фиг. 33.

$$MK = dr,\ KL = \operatorname{cotg} r' d\vartheta,\ KK' = \frac{PP'}{\sin r'} = \frac{d\zeta}{\sin r'}.$$

Поэтому объемъ элемента равенъ

$$\frac{\cos r'' dr\, d\zeta\, d\vartheta}{\sin^2 r'}.$$

Интегрируя это выраженіе по $\vartheta$ отъ 0 до $2\pi$, найдемъ выраженіе для объема кольца

$$\frac{2\pi\cos r' dr\, d\zeta}{\sin^2 r'} = -\frac{2\pi\cos r' dr' d\zeta}{\sin^3 r'}.$$

Интегрируя это выраженіе по $r$ отъ 0 до $\varrho$ (или по $r'$ отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\varrho'$), гдѣ $\varrho$ радіусъ параллели, мы найдемъ объемъ слоя:

$$dv = \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\varrho'} \frac{\pi d\zeta}{\sin^2 r'} = \pi \mathrm{cotg}^2 \varrho' d\zeta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Чтобы найти объемъ конечнаго слоя тѣла вращенія, необходимо выразить $\varrho$ въ зависимости отъ $\zeta$ и интегрировать это выраженіе по $\zeta$. Когда тѣло вращенія представляетъ собой шаръ, то $\sin\varrho' = \frac{\sin R'}{\sin\zeta'}$, какъ мы уже видѣли выше. Поэтому

$$dv = \frac{\pi(\sin^2\zeta' - \sin^2 R')}{\sin^2 R'} d\zeta = -\pi\left(\frac{\sin\zeta' d\zeta'}{\sin^2 R'} + d\zeta\right).$$

Интегрируя это выраженіе отъ $r_0$ до $r_1$, найдемъ объемъ сферическаго слоя, заключеннаго между двумя параллелями, отстоящими отъ центра на разстояніи $r_0$ и $r_1$

$$v = \pi\left(\frac{\cos r'_1 - \cos r'_0}{\sin^2 R'} - r_1 + r_0\right).$$

Полагая же здѣсь $r_0 = -R$, а $r_1 = R$ и имѣя въ виду, что $\cos(-R)' = -\cos R'$, найдемъ объемъ шара

$$V = 2\pi\left(\frac{\cos R'}{\sin^2 R} - R\right) = \pi(\mathrm{cotg} d' - d),$$

гдѣ $d = 2r$ есть діаметръ шара (см. ур. XVIII $a$).

Если данное тѣло представляетъ собой круговой конусъ, (фиг. 34), то разстояніе $\zeta$ можно отсчитывать по оси отъ вершины. Если обозначимъ черезъ $\alpha$ уголъ при вершинѣ конуса, то изъ треугольника СОК найдемъ:

(урав. V) $\cos\varrho' = \mathrm{cotg}\zeta' \mathrm{tg}\alpha$.

Слѣдовательно по формулѣ (16)

$$dv = \frac{\pi \mathrm{cotg}^2\zeta' \mathrm{tg}^2\alpha d\zeta}{1 - \mathrm{cotg}^2\zeta' \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\pi d\zeta}{1 - \mathrm{cotg}^2\zeta' \mathrm{tg}^2\alpha} - \pi d\zeta$$

и слѣдовательно объемъ прямого кругового конуса, имѣющаго высоту $\zeta$ и уголъ при вершинѣ $\alpha$, равенъ

$$v = \pi \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{1 - \mathrm{cotg}^2\zeta' \mathrm{tg}^2\alpha} - \pi\zeta.$$

Фиг. 34.

Чтобы раскрыть эту квадратуру, замѣтимъ, что

$$\frac{d\zeta}{1-\cot g^2\zeta' \operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\zeta' d\zeta}{\sin^2\zeta'-\cos^2\zeta' \operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{-\cos^2\alpha\sin\zeta' d\zeta'}{\cos^2\alpha-\cos^2\zeta'}=\frac{\cos\alpha}{2}\left\{\frac{d\cos\zeta'}{\cos\alpha+\cos\zeta'}+\frac{d\cos\zeta'}{\cos\alpha-\cos\zeta'}\right\}.$$

Поэтому, интегрируя это выраженіе по $\zeta'$ отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\zeta'$, получаемъ

$$\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{1-\cot g^2\zeta' \operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2}\lg\frac{\cos\alpha+\cos\zeta'}{\cos\alpha-\cos\zeta'}.$$

Замѣтимъ однако, что изъ треугольника AOC имѣемъ согласно уравненію XI:

$$\cos\zeta'=\cos\lambda'\cos\alpha,$$

гдѣ $\lambda$ образующая конуса. Подставляя это въ предыдущее выраженіе, найдемъ:

$$\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{1-\cot g^2\zeta' \operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2}\lg\frac{1+\cos\lambda'}{1-\cos\lambda'}=\cos\alpha\lg\cot g\frac{1}{2}\lambda'=\lambda\cos\alpha,$$

слѣдовательно:

$$v=\pi(\lambda\cos\alpha-h).$$

Таковъ объемъ всего конуса. Легко видѣть однако, что часть этого конуса, заключенная между двумя положеніями образующаго треугольника PCO и P'CO, составляющими весьма малый уголъ $d\vartheta$, относится къ объему всего конуса, какъ $d\vartheta$ къ $2\pi$. Поэтому элементъ конуса равенъ

$$dv=\frac{1}{2}d\vartheta(\lambda\cos\alpha-h).$$

Если мы себѣ представимъ теперь, что нашъ конусъ не круговой, то безконечно малую часть его $dv$ все же можно считать частью кругового конуса, такъ какъ такое допущеніе дастъ погрѣшность безконечно малую по отношенію къ $dv$. Но въ этомъ случаѣ, какъ $\lambda$, такъ и $\alpha$, будутъ измѣняться при передвиженіи точки P по периферіи основанія. Если эта кривая намъ извѣстна, то мы сможемъ выразить какъ $\lambda$, также $\alpha$ въ зависимости отъ угла $\vartheta$, который плоскость PCO образуетъ съ неподвижной плоскостью ACO. Интегрируя тогда предыдущее выраженіе по $\vartheta$ въ надлежащихъ предѣлахъ, получимъ объемъ конуса:

$$v=\frac{1}{2}\int(\lambda\cos\alpha-\zeta)d\vartheta.$$

Всякая пирамида можетъ быть очевидно разсматриваема, какъ такой конусъ. Но квадратуры, къ которымъ мы въ этомъ случаѣ приходимъ не раскрываются *).

*В. Каганъ* (Спб.).

# МНЕМОНИЧЕСКІЕ ЧЕРТЕЖИ ОБЪЕМОВЪ
# ШАРОВОГО СЛОЯ и ШАРОВОГО СЕГМЕНТА.

Проф. *Давидовъ*, обозначая черезъ $r$ и $r_1$ радіусы основаній шарового слоя и черезъ $H$ высоту его, выводитъ для его объема $V$ слѣдующую формулу:

$$„V = H\frac{\pi r^2 + \pi r_1^2}{2} + \frac{\pi H^3}{6}“, \qquad (1)$$

и высказываетъ ее въ видѣ такой теоремы:

*„объемъ слоя рявняется произведенію полусуммы его основаній на „высоту, сложенному съ объемомъ шара, имѣющаго эту высоту діаме-„тромъ“* [1]).

Полагая $r_1 = 0$ въ формулѣ (1), проф. *Давидовъ* получаетъ для объема $V$ шарового сегмента слѣдующую формулу:

$$„V = \frac{\pi H r^2}{2} + \frac{\pi H^3}{6}“, \qquad (2)$$

и высказываетъ ее въ видѣ такой теоремы:

*„объемъ шарового отрѣзка равняется половинѣ объема цилиндра „одинаковой высоты и одинаковаго основанія съ отрѣзкомъ, сложенной „съ объемомъ шара, имѣющаго его высоту діаметромъ“* [2]).

Г. *Киселевъ*, обозначая черезъ $r_1$ и $r_2$ радіусы основаній шарового слоя и черезъ $H$ высоту его, выводитъ для его объема слѣдующую формулу:

$$„\text{об. слоя} = {}^1/_6\,\pi H^3 + {}^1/_2\,\pi(r_1^2 + r_2^2)H“,$$

и высказываетъ ее въ видѣ такой теоремы:

---

*) См. *Лобачевскій*. „Воображаемая Геометрія“ стр. 115—119. Однако эти соображенія даютъ Лобачевскому возможность привести многія квадратуры однѣ къ другимъ, при помощи различной координаціи пирамиды. Этотъ вопросъ составляетъ въ сущности основную часть сочиненія: „Примѣненіе Воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ“.

[1]) А. Давидовъ. Элементарная геометрія въ объемѣ гимназическаго курса. Изданіе 15-е. М. 1888. § 297, стран.: 281.

[2]) Тамъ же. § 298, стран.: 281—282.

*„объемъ шарового слоя равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ „высоту слоя, сложенному съ полусуммою объемовъ двухъ цилиндровъ, у „которыхъ высота равна высотѣ слоя, а основанія: у одного нижнее, у „другого верхнее основаніе слоя“* [3]).

Полагая $r_2 = 0$ въ формулѣ (3), г. *Киселевъ* получаетъ для объема шарового сегмента слѣдующую формулу:

$$„\text{об. сегм.} = {}^1/_6\,\pi H^3 + {}^1/_2\,\pi r_1^2 H“ \quad [4]), \tag{4}$$

для которой соотвѣтствующей теоремы не высказываетъ.

Вышеприведенныя формулы и теоремы тѣмъ не удобны, что онѣ учащимися запоминаются съ трудомъ, а забываются легко. Г. *Рыбкину* пришла удачная мысль: для облегченія запоминанія этихъ формулъ и теоремъ перевести на чертежъ выраженіе для объема шарового слоя. Придуманная г. *Рыбкинымъ* иллюстрація формулы для объема слоя дѣйствительно облегчаетъ запоминаніе соотвѣтствующей формулы и теоремы и заслуживаетъ возможно большей извѣстности, но для того, чтобы мнемоническій чертежъ г. *Рыбкина* вполнѣ соотвѣтствовалъ формулѣ и теоремѣ для объема шарового слоя, необходимо формулы и теоремы для объемовъ шарового слоя и шарового сегмента представить въ нѣсколько измѣненномъ видѣ, нежели это сдѣлано у проф. *Давидова* и у г. *Киселева*.

Именно, обозначая черезъ $r_1$ и $r_2$ радіусы основаній шарового слоя и черезъ $H$ его высоту, формулу для его объема $V$ удобнѣе всего представить въ слѣдующемъ видѣ:

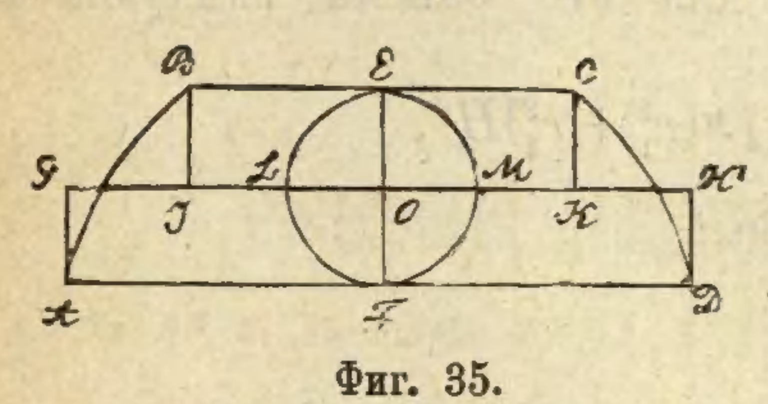
$$V = {}^1/_6\,\pi H^3 + \pi r_1^2 \cdot {}^1/_2\,H + \pi r_2^2 \cdot {}^1/_2\,H. \tag{5}$$

Формула эта можетъ быть высказана въ видѣ такой теоремы:

*Объемъ шарового слоя равенъ суммѣ объемовъ трехъ тѣлъ, именно: шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя, и двухъ цилиндровъ, имѣющихъ основаніями одинъ нижнее, другой верхнее основаніе слоя, а высотою каждый половину высоты слоя.*

Эту теорему легко помнить въ переводѣ на слѣдующій чертежъ г. *Рыбкина* [5]):

Этотъ чертежъ (фиг. 35) представляетъ сѣченіе четырехъ тѣлъ вращенія плоскостью, проходящею черезъ ихъ общую ось $EF$. Именно: криволинейная фигура $ABCD$ представляетъ сѣченіе шарового слоя, кругъ $EMFL$—сѣченіе шара, и прямоугольники $AGHD$ и $JBCK$—сѣченія цилиндровъ, при чемъ прямая $GH$ про-



Фиг. 35.

---

[3]) А. Киселевъ. Элементарная геометрія для среднихъ учебныхъ заведеній. М. 1892. § 458, стран.: 287.

[4]) Тамъ же.

[5]) Н. Рыбкинъ. Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи. 3-е изданіе. М. 1894. Стран. 2, черт. 1.

ходитъ черезъ центръ $O$ круга $EMFL$; въ такомъ случаѣ объемъ шарового слоя равенъ суммѣ объемовъ шара и двухъ цилинровъ.

Полагая въ формулѣ (5) $r_1 = r$ и $r_2 = 0$, получимъ для объема $V$ шарового сегмента слѣдующую формулу:

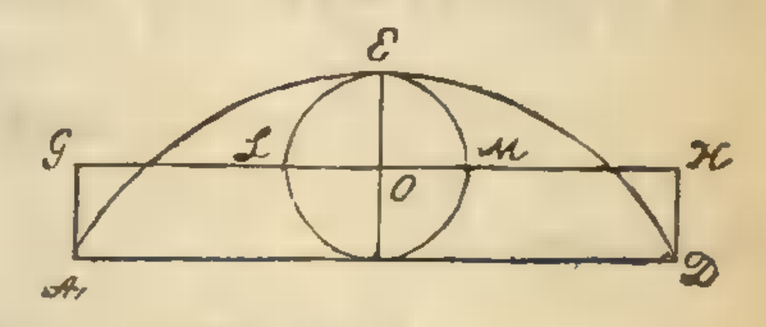
$$V = {}^1/_6\, \pi H^3 + \pi r^2 \,.\, {}^1/_2\, H, \qquad (6)$$

которая можетъ быть высказана въ видѣ такой теоремы:

*Объемъ шарового сегмента равенъ суммѣ объемовъ двухъ тѣлъ, именно: шара, имѣющаго діаметромъ высоту сегмента, и цилиндра, имѣющаго основаніемъ основаніе сегмента, а высотою половину высоты сегмента.*

Эту теорему легко помнить въ переводѣ на слѣдующій чертежъ:

Этотъ чертежъ (фиг. 36) представляетъ сѣченія трехъ тѣлъ вращенія плоскостью, проходящею черезъ ихъ общую ось $EF$. Именно: круговой сегментъ $AED$ представляетъ сѣченіе шарового сегмента, кругъ $EMFL$—сѣченіе шара, и прямоугольникъ $AGHD$—сѣченіе цилиндра, при чемъ прямая $GH$ проходитъ черезъ центръ $O$ круга $EMFL$; въ такомъ случаѣ объемъ шарового сегмента равенъ суммѣ объемовъ шара и цилиндра.



Фиг. 36.

Я убѣдился какъ на себѣ, такъ и на учащихся, что эти чертежи очень облегчаютъ прочное запоминаніе формулъ и теоремъ для объемовъ шарового слоя и шарового сегмента, и рекомендую всѣмъ составителямъ учебниковъ „Элементарной геометріи" ввести какъ эти чертежи такъ и соотвѣтственно имъ измѣненныя формулы и теоремы въ свои учебники, ибо хотя эти чертежи не будутъ лишними и въ задачникахъ, подобныхъ стереометрическому задачнику г. *Рыбкина*, но тамъ они не достигаютъ главной своей цѣли: облегчить заучиваніе соотвѣтствующихъ формулъ и теоремъ, ибо задачникъ г. *Рыбкина* и ему подобные примѣняются лишь при повторительномъ курсѣ геометріи, когда ученики такъ или иначе, съ большимъ или меньшимъ усиліемъ уже усвоили соотвѣтствующія формулы и теоремы.

*С. Гирманъ* (Варшава).

# НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНАЯ ПОВѢРКА РѢШЕНІЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ.

На письменномъ испытаніи по тригонометріи въ $18^{95}/_{96}$ учебномъ году ученикамъ Варшавскаго реальнаго училища была дана слѣдующая задача:

Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a = 15$ фут., соотвѣтствующей ей высотѣ $h = 11{,}2$ фут. и радіусу описаннаго круга $R = 8{,}125$ фут. Сдѣлать повѣрку.

Рѣшеніе задачи состоитъ въ слѣдующемъ: изъ уравненія

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

опредѣляемъ

$$A = 67^0 22'44''; \ A_1 = 112^0 37'16''.$$

Второе значеніе угла A непригодно для данной задачи и она имѣетъ только одно рѣшеніе.

Теперь нужно рѣшить треугольникъ по основанію $a = 15$; высотѣ $h = 11{,}2$ и углу при вершинѣ $A = 67^0 22'44''$.

Поступая указаннымъ въ учебникахъ тригонометріи способомъ, изъ уравненія $\mathrm{ctg}\varphi = \frac{2h}{a}$ находимъ $\varphi = 33^0 48'27''$; изъ уравненія же

$$\cos(B - C) = \frac{\sin(A - \varphi)}{\sin\varphi}$$

получаемъ

$$\lg\cos(B - C) = \lg\sin(A - \varphi) - \lg\sin\varphi = 9{,}99731 \ . \ . \ . \ (A)$$

слѣдовательно $B - C = 6^0 22'$. А такъ какъ $B + C = 180^0 - A = 112^0 37'16''$, то

$$B = 59^0 29'38''; \ C = 53^0 7'38''.$$

Стороны можно найти изъ пропорцій:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ и } \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C};$$

откуда $b = 14$ (почти); $c = 13$.

При рѣшеніи этой задачи одинъ изъ учениковъ сдѣлалъ слѣдующую ошибку: вычисляя $\lg\cos(B - C)$ по формулѣ (A), онъ, по разсѣянности, вмѣсто вычитанія логариѳмовъ сдѣлалъ сложеніе и получилъ $\lg\cos(B - C) = 9{,}48809$; откуда $B - C = 72^0 4'51''$; а такъ какъ уголъ A и $B + C = 180^0 - A$ были найдены ученикомъ правильно ($B + C = 112^0 37'16''$), то онъ получилъ $B = 92^0 21'3''$; $C = 20^0 16'13''$. Стороны онъ вычислилъ по формуламъ Мольвейде:

$$\frac{b + c}{a} = \frac{\cos\frac{B - C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \text{ и } \frac{b - c}{a} = \frac{\sin\frac{B - C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \ . \ . \ . \ (B)$$

и получилъ $b + c = 21{,}866$; $b - c = 10{,}6066$; слѣд. $b = 16{,}2363$; $c = 5{,}6297$, т. е. всѣ элементы треугольника вычислилъ неправильно.

Для повѣрки своихъ вычисленій ученикъ по найденнымъ имъ неправильно элементамъ задумалъ опредѣлить данную сторону $a$; для чего взялъ извѣстную формулу:

$$a = \frac{p.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

гдѣ $p$ — полупериметръ треугольника $=18{,}433$, и получилъ $\lg a =$ $= \lg p + \lg\sin\frac{A}{2} +$ дополненіе $\lg\cos\frac{B}{2} +$ дополн. $\lg\cos\frac{C}{2} = 1{,}26560 +$ $+ 9{,}74405 - 10 + 0{,}15961 + 0{,}00683 = 1{,}17609$; откуда $a = 15$, т. е. получилъ $a$ такое, какое было дано, не смотря на то, что $p$, B и C въ предыдущей формулѣ ошибочны.

Послѣ повѣрки ученикъ, убѣжденный въ правильности своихъ вычисленій, началъ переписывать работу набѣло и замѣтилъ свою ошибку. Тогда, не измѣняя черновой, онъ началъ (въ бѣловой работѣ) рѣшать задачу правильно; вычислилъ вѣрно всѣ элементы и сдѣлалъ повѣрку по той же формулѣ:

$$a = \frac{p.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

гдѣ $p(=21)$, B и C взяты были правильно. Тогда получилось:

$$\lg a = \lg p + \lg\sin\frac{A}{2} + \text{доп. } \lg\cos\frac{B}{2} + \text{доп. } \lg\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 1{,}32222 + 9{,}74405 - 10 + 0{,}06137 + 0{,}04845 = 1{,}17609,$$

откуда $a$ опять $= 15$.

---

Объясненіе неудовлетворительности повѣрки, указанной выше, состоитъ въ слѣдующемъ: 1) Если въ задачѣ бываетъ данъ одинъ изъ угловъ (у насъ $\angle$ A), или, что то же, сумма двухъ другихъ угловъ (у насъ $B + C = 180 - A$), и мы вычисляемъ разность этихъ угловъ (у насъ B—C), то какъ бы мы ни вычислили эту разность (B—C)—вѣрно, или невѣрно — всегда полученные нами углы (B и C), въ суммѣ съ даннымъ угломъ (A), составятъ $180^0$; необходимо только, чтобы по вѣрной суммѣ $(B + C)$ и вѣрной, или невѣрной, разности (B—C) самые углы (B и C) были вычислены правильно, т. е. чтобы не было сдѣлано ошибокъ при сложеніи и вычитаніи $(B + C)$ и $(B - C)$ и дѣленіи результатовъ на 2. Дѣйствительно, если, при опредѣленіи B—C, ошибки мы не сдѣлали, то пусть $B + C = M^0$; $B - C = N^0$; тогда

$$B = \frac{M+N}{2};\ C = \frac{M-N}{2};$$

слѣдовательно

$$A + B + C = A + \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2} = A + M = 180^0.$$

Если же мы сдѣлали ошибку, то пусть $B+C=M^0$; $B-C=N^0-\delta$; тогда

$$B=\frac{M+N-\delta}{2};\ C=\frac{M-N+\delta}{2};$$

слѣдовательно

$$A+B+C=A+\frac{M+N-\delta}{2}+\frac{M-N+\delta}{2}=A+M,$$

т. е. опять $=180^0$.

2) Обозначимъ теперь вычисленные ученикомъ ошибочно углы черезъ $\beta$ и $\gamma$; стороны черезъ $b_1$ и $c_1$, периметръ черезъ $2\ p_1$. Стороны эти вычислены ученикомъ по формуламъ Мольвейде:

$$\frac{b_1+c_1}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\ \text{и}\ \frac{b_1-c_1}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

(см. (B)); эти формулы предполагаютъ непремѣнно и такую зависимость

$$\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{c_1}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ (D)$$

изъ которой онѣ и получаются. Выше было сказано, что $A+\beta+\gamma=180^0$; но въ такомъ случаѣ

$$\sin A+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Изъ ряда же равныхъ отношеній (D) слѣдуетъ

$$\frac{a+b_1+c_1}{\sin A+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{a}{\sin A};\ \text{или}\ \frac{2p_1}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}};\ \text{или}$$

$$\frac{p_1}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ I$$

Если же возьмемъ элементы треугольника, вычисленные вѣрно, то

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A};$$

отсюда

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A};\ \text{или}\ \frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}};\ \text{или}$$

$$\frac{p}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ II$$

Изъ формулъ I и II слѣдуетъ, что

$$\frac{p_1}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{p}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

поэтому-то все равно, взять ли:

$$a=\frac{p_1 \,.\, \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

какъ сдѣлалъ ученикъ въ черновой, или взять:

$$a=\frac{p \,.\, \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

какъ сдѣлалъ онъ въ бѣловой работѣ.

Учитель Варшавскаго реальн. учил. *В. Красницкій.*

# О СИМВОЛѢ: $\frac{\infty}{\infty}$

Если въ тождествѣ:

$$\frac{1/B}{1/A}=\frac{A}{B},$$

положимъ

$$A=0 \text{ и } B=0,$$

то получимъ

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0},$$

откуда слѣдуетъ, что символъ $\frac{\infty}{\infty}$, разсматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Въ томъ случаѣ, когда $A$ и $B$ обозначаютъ выраженія, содержащія одну и ту же букву и обращающіяся одновременно въ $\infty$ при нѣкоторомъ частномъ значеніи этой буквы, неопредѣленность вида $\frac{\infty}{\infty}$, въ которую при этомъ обратится дробь $\frac{A}{B}$, можетъ быть только кажущеюся. Примѣръ такой дроби представляетъ случай, когда $A$ и $B$ цѣлые относительно $x$ многочлены, такъ что:

$$\frac{A}{B}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}.$$

Чтобы найти истинное значенie этой дроби при $x = \infty$, надо предварительно числителя и знаменателя ея раздѣлить на высшую въ этой дроби степень буквы $x$, сдѣлать въ каждомъ членѣ возможныя сокращенія и затѣмъ уже положить $x = \infty$. Такимъ образомъ здѣсь являются три случая:

1) $m < n$. Дѣля $A$ и $B$ на $x^n$, послѣ сокращеній получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{a_0}{x^{n-m}} + \frac{a_1}{x^{n-m+1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_m}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n}{x^n}}.$$

Полагая здѣсь $x = \infty$ и замѣчая, что $n - m > 0$, получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{0}{b_0} = 0.$$

2) $m = n$. Подставляя $m$ вмѣсто $n$ въ $B$ и дѣля затѣмъ $A$ и $B$ на $x^m$, послѣ сокращеній получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}}.$$

Полагая здѣсь $x = \infty$, получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_0}{b_0}.$$

3) $m > n$. Дѣля $A$ и $B$ на $x^m$, послѣ сокращеній получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a^m}{x_m}}{\frac{b_0}{x^{m-n}} + \frac{b_1}{x^{m-n+1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_n}{x^m}}.$$

Полагая здѣсь $x = \infty$ и замѣчая, что $m - n > 0$, получаемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_0}{0} = \infty.$$

Итакъ, *истинное значенie дроби:*

$$\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n},$$

*при* $x = \infty$ *будетъ:* 1) *нуль, если* $m < n$, 2) $\frac{a_0}{b_0}$, *если* $m = n$, *и* 3) $\infty$, *если* $m > n$.

Теорема эта въ учебникахъ алгебры доказывается почему то

только на частныхъ примѣрахъ, хотя, какъ видно изъ предыдущаго, и въ общемъ видѣ она можетъ быть доказана весьма просто, между тѣмъ изъ нея вытекаетъ слѣдующее важное свойство дробныхъ уравненій:

*Уравненіе:*

$$\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n} = 0,$$

*кромѣ конечныхъ корней имѣетъ корень* $x = \infty$, *если* $m < n$, *т. е. если степень числителя ниже степени знаменателя.*

Въ виду важности этого слѣдствія я полагаю, что предыдущая теорема должна быть въ учебникахъ алгебры доказываема въ общемъ видѣ, какъ это было сдѣлано выше.

*С. Гирманъ* (Варшава).

# ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ $18^{95}/_{96}$ Г.

## *Варшавскій Учебный Округъ.*

### Варшавское реальное училище.

**Въ VI классѣ.** *По ариѳметикѣ* (только для постороннихъ кандидатовъ). Нѣкто купилъ 108 аршинъ сукна и $^1/_{1,(3)}$ купленнаго количества продалъ одному покупателю за 506 р. 25 к., при чемъ онъ получилъ 25% прибыли. Остальное количество сукна было раздѣлено на 3 куска, величины которыхъ относились между собою, какъ 10:12:5. При продажѣ перваго и третьяго изъ этихъ трехъ кусковъ получено было 20% прибыли, при продажѣ второго $16^2/_3$%. На сумму, полученную отъ продажи всѣхъ трехъ кусковъ былъ купленъ $90^0$-ый спиртъ по 8 р. за ведро. Сколько ведеръ воды нужно прилить къ этому спирту для того, чтобы получить спиртъ $80^0$-ый.

*По алгебрѣ.* Діаметръ французской золотой двадцатифранковой монеты содержитъ столько миллиметровъ, сколько будетъ единицъ въ большемъ изъ положительныхъ корней уравненія

$$21x^3 - 421x^2 - 421x + 21 = 0.$$

Діаметръ серебряной пятифранковой монеты содержитъ число миллиметровъ, равное положительному значенію $y$, удовлетворяющему уравненію

$$\lg_{10}(3y-11) + \lg_{10}(y-27) = 3.$$

Неизвѣстная сумма денегъ состояла изъ золотыхъ двадцатифранковыхъ и серебряныхъ пятифранковыхъ монетъ; если всѣ эти монеты расположить одну возлѣ другой по прямой линіи, то длина этой послѣдней будетъ равна одному метру. Найти эту сумму денегъ.

*По геометріи на вычисленіе.* Прямой цилиндръ, котораго высота

равна $h$ и радіусъ основанія равняется $r$, равновеликъ прямому усѣченному конусу, котораго нижнее основаніе равно основанію цилиндра и высота вдвое больше высоты цилиндра. Вычислить боковую поверхность усѣченнаго конуса ($h=\sqrt{3}-1$; $r=4$; $\pi=3{,}141$).

*По геометріи на построеніе* (только для посторонних кандидатовъ). Построить трапецію по суммѣ ея параллельныхъ сторонъ, одной изъ непараллельныхъ сторонъ, отношенію ея діагоналей (5:2) и высотѣ.

*По тригонометріи.* Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=15$ ф., соотвѣтствующей ей высотѣ $h=11{,}2$ ф. и радіусу описаннаго круга $R=8{,}125$ ф. Сдѣлать повѣрку.

**Въ дополнительномъ классѣ.** *По алгебрѣ.* Пусть трехчлены второй степени: $x^2+ax+b$, $x^2+3^1/_2x+2^1/_2$ и $x^2+x+3$, представляютъ первые три послѣдовательныхъ члена ариѳметической прогрессіи. Опредѣливъ коэффиціенты $a$ и $b$ для всякаго значенія $x$, опредѣлить потомъ такое значеніе $x$, при которомъ сумма первыхъ 10-и членовъ этой прогрессіи будетъ minimum.

*По приложенію алгебры къ геометріи.* Въ кругъ даннаго радіуса $R$ вписать равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы сумма его боковыхъ сторонъ и высоты была равна данному прямолинейному отрѣзку $s$.

*По геометріи.* Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія прямоугольника около оси, проходящей черезъ одну его вершину перпендикулярно къ діагонали $d=34{,}06$ метр., которая образуетъ со стороною уголъ $\alpha=56^0 14' 18''$.

Сообщилъ *С. Гирманъ.*

---

*Московскій учебный округъ.*

## Иваново-Вознесенское реальное училище.

**VI кл.** *Алгебра* (3 часа). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе $ax+by=c$, гдѣ $a$ есть 1-й членъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи, въ которой сумма 1-го и 2-го членовъ равна 4, а сумма 1-го и 3-го членовъ равна 10; $b$ равно большему корню уравненія

$$\log 64 \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}=0,$$

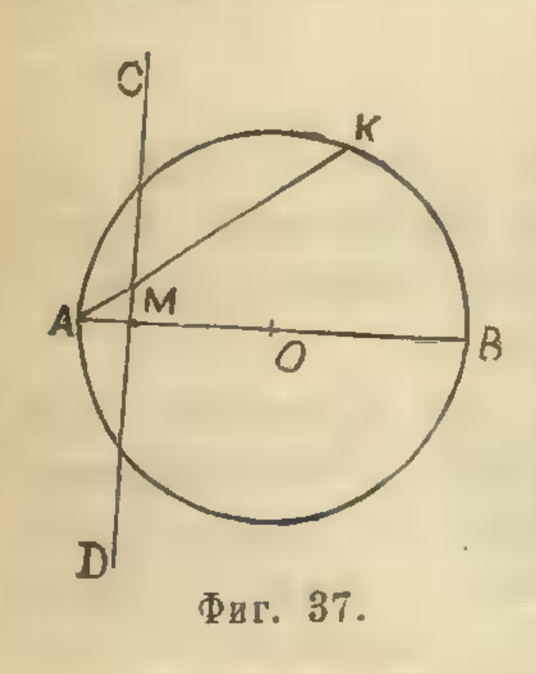
а $c$ есть наибольшее трехзначное число кратное 13.

*Геометрія* ($2^1/_2$ ч.). Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ полная поверхность равна 22 кв. сант., діагональ $3\sqrt{3}$ сант., а высота равна меньшей сторонѣ основанія. Вычислить съ точностью до 0,01 объемы двухъ тѣлъ, на которыя параллелепипедъ раздѣляется плоскостью, проходящею черезъ большую сторону основанія и наклоненною къ плоскости основанія подъ угломъ въ $30^0$.

*Тригонометрія* ($2^1/_2$ ч.). Вычислить стороны треугольника ABC,

вписаннаго въ кругъ радіуса $r = 0, 5628$ дюйма, если извѣстно, что сторона AB стягиваетъ дугу въ $57^0 42' 40''$, а AC вдвое больше AB.

**VII кл.** *Дополнительный курсъ алгебры* ($2^1/_2$ ч.). Раздѣлить данный отрѣзокъ AB на двѣ части такъ, чтобы сумма площадей правильнаго треугольника, построеннаго на одной части, и квадрата, построеннаго на другой, была наименьшая. Вычислить величину этой суммы съ точностью до 0,1, если $AB = 13$ сант.



Фиг. 37.

*Приложеніе алгебры къ геометріи* ($2^1/_2$ ч.). Изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ одна AB проходитъ черезъ центръ круга радіуса R, а другая CD на разстояніи $a$ отъ центра этого круга. Провести черезъ точку A прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея MK между прямою CD и окружностью имѣлъ данную длину $b$. (Построить отрѣзокъ AM). Къ задачѣ приложенъ чертежъ.

*Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

---

## Тамбовская гимназія.

*Геометрія.* Даны двѣ соприкасающіяся окружности. Зная радіусы этихъ окружностей, опредѣлить углы и площадь треугольника, образуемаго тремя ихъ общими касательными, Вычислить полученныя формулы, полагая радіусы окружностей соотвѣтственно равными 45 и 20.

*Алгебра.* Пусть $a$ и $b$ будутъ соотвѣтственно числитель и знаменатель 5-ой подходящей дроби $\sqrt{13}$, обращеннаго въ непрерывную дробь. Найти числа $x$ и $y$, удовлетворяющія уравненіямъ $x^3 + y^3 = 2a - 1$ и $x + y = b$.

## Тамбовское реальное училище.

**VI кл.** *Геометрія.* Черезъ вершину C квадрата ABCD, сторона котораго равна $a$, проведена прямая CX, проходящая черезъ средину E стороны AD. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ четыреугольника EABC около прямой CX.

*Алгебра.* Четвертый членъ ариѳметической прогрессіи равенъ 19; седьмой ея членъ равенъ значенію $x$, удовлетворяющему уравненію

$$\sqrt{2x-13} - \sqrt{x+5} = 1,$$

а сумма всѣхъ членовъ прогрессіи есть наименьшее изъ всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 37 даютъ въ остаткѣ 33, а при дѣленіи на 53 даютъ въ остаткѣ 32. Опредѣлить число членовъ прогрессіи.

*Тригонометрія.* Рѣшить косоугольный треугольникъ когда даны:

$$a = 854{,}67,\ \angle B = 28^0 15' 44'' \text{ и } b + c = 413{,}73.$$

VII кл. *Алгебра.* Привести къ виду $a+b\sqrt{-1}$ комплексное количество $\sqrt{a+6bi}$, въ которомъ $a$ обозначаетъ maximum трехчлена

$$-x^2+6x-4,$$

а $b$ есть предѣлъ, къ которому стремится дробь

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5x^2-4x-1}}{\sqrt{x^3-1}}$$

при $x=1$.

*Приложеніе алгебры къ геометріи.* Даны два круга O и $O_1$, радіусы которыхъ R и $R_1$, и точка A, лежащая на окружности одного изъ данныхъ круговъ. Построить третій кругъ, касательный къ двумъ даннымъ кругамъ и проходящій черезъ точку A.

*Геометрія.* Въ правильной пирамидѣ SABC, высота которой $=h$, а основаніемъ служитъ правильный треугольникъ ABC, имѣющій сторону $=a$, проведено черезъ ребро AB сѣченіе KAB, наклоненное къ основанію пирамиды подъ угломъ $=\alpha$. Опредѣлить объемъ отрѣзка KABC. Полученную формулу для отрѣзка KABC вычислить съ точностью до 0,001, полагая $a=35$, $h=48$ и $\alpha=48^\circ 32' 18''$.

Сообщ. *И. Алексанровъ* (Тамбовъ).

---

# ЗАДАЧИ.

---

**№ 331.** Показать, что

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x^3+y^3+z^3+t^3)>48\ xyzt,$$

если $x+y+z+t=1$ и всѣ числа $x$, $y$, $z$, $t$ положительны.

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

**№ 332.** Доказать теорему: если числа $x$, $y$, $z$, $t$ положительны и сумма ихъ равна единицѣ, то

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x^3+y^3+z^3+t^3)>3(xyz+xzt+xyt+yzt).$$

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

**№ 333.** Провести по касательной къ каждому изъ двухъ данныхъ круговъ $O$ и $O_1$, если извѣстенъ уголъ между касательными и отношеніе ихъ разстояній отъ данной точки $A$.

*П. Хлѣбниковъ* (Тула).

**№ 334.** Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу, взятую изъ „Собранія стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи“ Н. Рыбкина, изд. 3, стр. 27, № 76.

„Пирамида съ равными боковыми ребрами имѣетъ въ основаніи прямоугольникъ, стороны котораго $a$ и $b$; соотвѣтствующіе этимъ сторонамъ плоскіе углы при вершинѣ пирамиды относятся какъ 3 : 1. Опредѣлить объемъ этой пирамиды“.

*Н. Николаевъ* (Пенза).

**№ 335.** Показать, что $2^{64}+1$ имѣетъ дѣлителемъ число 274177.

(Заимств.) *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

**№ 336.** Построить треугольникъ по даннымъ: углу $(\angle B)$, разности между стороной, прилежащей этому углу, и высотой, соотвѣтствующей другой прилежащей сторонѣ $(c - h_a)$ и по периметру треугольника.

*С. Конюховъ* (Харьковъ).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 221** (3 сер.). Показать, что если $A$, $B$, $C$ суть углы треугольника $ABC$, а $A'$, $B'$, $C'$ — углы, подъ которыми стороны треугольника видны изъ центра круга вписаннаго, то

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin A'.\sin B'.\sin C'.$$

Такъ какъ

$$A'=180^0-\frac{B+C}{2};\quad B'=180^0-\frac{A+C}{2};\quad C'=180^0-\frac{A+B}{2},$$

то

$$\sin A'=\cos{}^A/_2;\quad \sin B'=\cos{}^B/_2;\quad \sin C'=\cos{}^C/_2.$$

Но

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\cos{}^A/_2.\cos{}^B/_2.\cos{}^C/_2=$$

$$=4\sin A'.\sin B'.\sin C'.$$

*Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. ■ Р., В Соковичъ* (Кіевъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Э. Заторскій* (Спб.).

**№ 255** (3 сер.). Дана окружность, центръ которой въ точкѣ $O$, проведенный въ ней діаметръ $AB$ и точка $M$ на окружности. Требуется черезъ точку $M$ провести хорду $MN$, пересѣкающую діаметръ $AB$ въ точкѣ $X$ такъ, чтобы отрѣзокъ $NX$ равнялся отрѣзку діаметра $XO$. Показать, что задача эта не разрѣшима помощью циркуля и линейки.

Пусть данъ нѣкоторый уголъ $AOP$. Опишемъ изъ вершины его окружность пересѣкающую стороны угла въ точкахъ $A$ и $P$ и продолжимъ сторону $PO$ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ $M$. Положимъ теперь, что черезъ точку $M$ проведена хорда, удовлетворяющая требованіямъ задачи, т. е. пересѣкающая сторону $AO$ въ такой точкѣ $X$, что $OX = NX$. Тогда $\angle ONX = \angle NOX = \angle OMN = 1/2 \angle NOP = 1/3 \angle AOP$. Такимъ образомъ, если бы возможно было провести хорду $MN$ при помощи циркуля и линейки, то этимъ рѣшалась бы и задача о трисекціи угла.

*Ю. Идельсонъ* (Одесса); *Э. Заторскій* (Вильно); *М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

---

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## JOURNAL
## de mathématiques élémentaires.
### 1895. — № 12.

**Sur le classement des racines appartenant à deux équations du second degré.** Par M. *Elgé.* Даны два квадратныхъ ур-нія

$$x^2 + px + q = 0$$

и

$$X^2 + p'X + q' = 0;$$

задача состоитъ въ томъ, чтобы расположить корни этихъ ур-ній въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ по ихъ величинѣ.

Положивъ въ данныхъ ур-ніяхъ

$$x = u + h \text{ и } X = U + h,$$

получимъ ур-нія

$$u^2 + (2h + p)u + h^2 + ph + q = 0,$$

$$U^2 + (2h + p')U + h^2 + p'h + q' = 0,$$

корни которыхъ по ихъ величинѣ располагаются въ томъ же порядкѣ, какъ и корни данныхъ ур-ній. Предполагая, что $p$ не $= p'$, выберемъ $h$ такъ, чтобы

$$ph + q = p'h + q',$$

т. е. положимъ

$$h = \frac{q - q'}{p' - p};$$

черезъ это ур-нія примутъ видъ

$$u^2 + Pu + Q = 0, \qquad (1)$$

$$U^2 + P'U + Q = 0, \qquad (2)$$

гдѣ $P = 2h + p$, $P' = 2h + p'$, $Q = h^2 + ph + q$.

Обозначимъ черезъ $\alpha$, $\beta$ и $\alpha'$, $\beta'$ корни этихъ ур-ній и назовемъ наибольшій и наименьшій изъ этихъ корней — *крайними*, а другіе два — *средними.* Такъ какъ $\alpha\beta = \alpha'\beta' = Q$, то крайніе корни не могутъ принадлежать одному ур-нію; пусть эти корни суть $\alpha$ и $\alpha'$.

Если $Q < 0$, то представивъ ур-нія (1) и (2) въ видѣ:

$$\alpha + P + \frac{Q}{\alpha} = 0$$

и

$$\alpha' + P' + \frac{Q}{\alpha'} = 0,$$

получимъ

$$(\alpha - \alpha')\left(1 - \frac{Q}{\alpha\alpha'}\right) = P' - P;$$

такъ какъ крайніе корни $\alpha$ и $\alpha'$ при сдѣланномъ предположеніи положительны, то разности $\alpha - \alpha'$ и $P' - P$ имѣютъ одинъ знакъ $+$ или $-$; но $P' - P = p' - p$; слѣдовательно порядокъ корней по ихъ величинѣ опредѣляется знаками выраженій $Q$ и $p' - p$.

Если $Q > 0$, то замѣтивъ, что

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta,$$

$$\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)^2 = \alpha'\beta',$$

$$\frac{p^2 - p'^2}{4} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)^2,$$

заключаемъ, что знакъ разности $(\alpha - \beta) - (\alpha' - \beta')$ опредѣляется знакомъ выраженія $P^2 - P'^2 = (p - p')(4h + p + p')$; слѣдов. порядокъ корней ур-ній тоже опредѣляется знакомъ этого выраженія.

**Quelques propriétés du cercle conjugué à un triangle.** Par M. *S. Chassiotis* (fin). Въ началѣ этой статьи (J. E. 1895. № 10). *M Chassiotis* доказалъ, что для даннаго тр-ка ABC существуютъ три гиперболы *), имѣющихъ одинъ изъ фокусовъ въ ортоцентрѣ тр-ка и касающихся двухъ его сторонъ. Пусть $f'$, $f''$, $f'''$ суть другіе фокусы этихъ гиперболъ; эти точки симметричны съ ортоцентромъ тр-ка H относительно срединъ его сторонъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Отсюда слѣдуетъ, что кругъ $f'f''f'''$ и кругъ 9-ти точекъ тр-ка ABC гомотетичны относительно ортоцентра тр-ка и отношеніе радіусовъ ихъ $= 2$; слѣд. кругъ $f'f''f'''$ совпадаетъ съ кругомъ ABC. Такимъ образомъ, обозначая вышеупомянутыя гиперболы черезъ $H'$, $H''$, $H'''$, получаемъ теорему:

*Фокусы* $f'$, $f''$, $f'''$ *гиперболъ* $H'$, $H''$, $H'''$, *соотвѣтствующихъ данному тр-ку* ABC, *находятся на окружности, описанной около этого тр-ка.*

**Correspondance.** *M. Aubry* высказываетъ мнѣніе, что формула

$$V = \frac{H}{6}(B + 4B' + B''),$$

служащая для вычисленія объема усѣченной пирамиды (и другихъ пирамидо-образныхъ многогранниковъ) и извѣстная подъ именемъ формулы *Sarrus*'а, найдена либо Торричелли, либо Маклореномъ.

**Exercices divers.** Par M. *Aug. Boutin.* №№ 414—416.

№ 414. Если $n$ есть сумма двухъ треугольныхъ чиселъ, то $4n + 1$ есть сумма двухъ квадратовъ, и наоборотъ.

**Baccalauréats.**

**Questions.** №№ 634, 675. 640, 641, 647, 648, 652, 655, 657.

**Questions proposées.** №№ 690—696.

*Д. Е.*

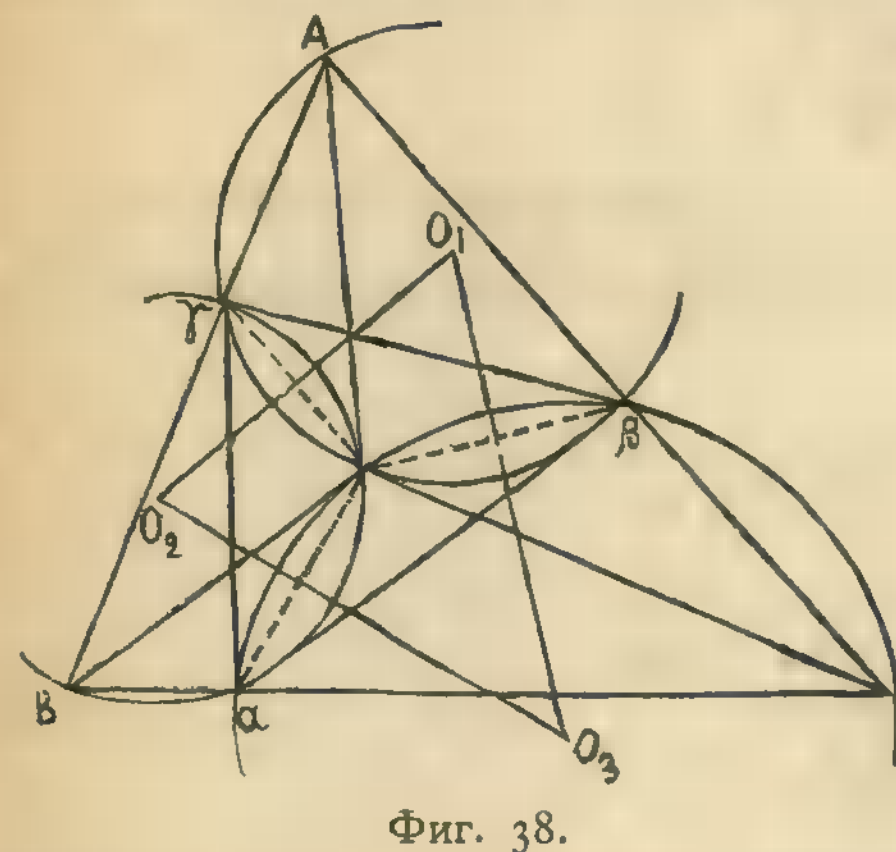


*) По ошибкѣ—гиперболы эти въ упоминаемой статьѣ названы равнобочными.

# MATHESIS.

## 1895.—№ 7.

**Sur les centres isogones.** Par *M. H. Mandart*. Пусть I есть нѣкоторая точка въ плоскости тр-ка ABC. Обозначимъ черезъ $O_1$, $O_2$, $O_3$ центры трехъ окружностей, изъ которыхъ



Фиг. 38.

$O_1$ проходитъ черезъ A и касается въ I прямой IC,

$O_2$ проходитъ черезъ B и касается въ I прямой IA,

$O_3$ проходитъ черезъ C и касается въ I прямой IB.

Вторыя точки пересѣченія окружностей $O_2$ и $O_3$, $O_3$ и $O_1$, $O_1$ и $O_2$ обозначимъ черезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Авторъ статьи доказываетъ, что: если точки $\alpha, \beta, \gamma$ находятся на сторонахъ тр-ка BC, CA и AB, то точка I есть *изогональный центръ* тр-ка ABC, (т. е. такая точка, изъ которой стороны этого тр-ка видны подъ равными углами). Дѣйствительно изъ вписанныхъ чт-въ $I\gamma A\beta$, $I\alpha B\gamma$, $I\beta C\alpha$ слѣдуетъ, что

$$\angle I\alpha C = \angle I\gamma B = \angle I\beta A;$$

кромѣ того

$$\angle I\alpha C = \angle IBC + \angle ICB,\ \angle I\beta A = \angle ICA + \angle IAC,\ \angle I\gamma B = \angle IAB + \angle IBA,$$

откуда

$$3\angle I\alpha C = A + B + C,\ \angle I\alpha C = 60^0 \text{ и } \angle BIC = 120^0.$$

Легко убѣдиться также, что въ тр-кѣ $\alpha\beta\gamma$

$$\angle\alpha = 120^0 - A,\ \angle\beta = 120^0 - B,\ \angle\gamma = 120^0 - C.$$

Точка I относительно тр-ка $\alpha\beta\gamma$ опредѣляется углами:

$$\angle\beta I\gamma = 180^0 - A = 60^0 + \alpha,$$

$$\angle\gamma I\alpha = 180^0 - B = 60^0 + \beta,$$

$$\angle\alpha I\beta = 180^0 - C = 60^0 + \gamma.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что I есть *изодинамическій центръ* тр-ка $\alpha\beta\gamma$, т. е. точка пересѣченія *окружностей Аполлонія* для этого тр-ка *)

Стороны тр-ка $O_1O_2O_3$ перпендикулярны къ прямымъ $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$; прямыя $IO_1$, $IO_2$, $IO_3$ перпендикулярны къ CI, AI, BI. Поэтому

$$\angle O_1 = A,\ \angle O_2 = B,\ \angle O_3 = C,$$

$$\angle O_2IO_3 = \angle O_3IO_1 = \angle O_1IO_2 = 120^0;$$

слѣд. тр-ки $O_1O_2O_3$ и ABC подобны и точка I есть центръ подобія ихъ.

---

*) *Окружностью Аполлонія* даннаго тр-ка наз. окружность, имѣющая діаметромъ отрѣзокъ стороны тр-ка, опредѣляемый пересѣченіями ея съ внутреннимъ и внѣшнимъ биссекторами противолежащаго угла.

Подобно окружностямъ $O_1$, $O_2$, $O_3$ можно описать еще три окружности:

$O'_1$, проходящую черезъ A и касающуюся въ I прямой IB,
$O'_2$ „ „ B „ „ „ IC,
$O'_3$ „ „ C „ „ „ IA;

окружности эти попарно пересѣкутся въ точкахъ $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ на сторонахъ тр-ка BC, CA и AB. Окружности $O_1$, $O_2$, $O_3$ соотвѣтственно симметричны съ окружностями $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$ относительно прямыхъ AI, BI, CI. Центры окружностей $O_1$, $O_2$, $O_3$ лежатъ на окружностяхъ $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$ и наоборотъ.

**Notes mathématiques.** 9. Sur divers points d'analyse, par *M. E. Cesaro.* Для нахожденія предѣловъ выраженій $a^n$ и $\frac{a^n}{n!}$ для $n=\infty$, Cesaro представляетъ ихъ въ видѣ:

$$a^n = a.a^{n-1}, \quad \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n}\cdot\frac{a^{n-1}}{(n-1)!};$$

отсюда, обозначивъ предѣлы данныхъ выраженій черезъ $\lambda$ и $\mu$, получимъ

$$\lambda = a.\lambda \text{ и } \mu = \frac{a}{n}\cdot\mu_{n=\infty}, \text{ т. е.}$$

$\lambda$ = нулю или безконечности, $\mu = 0$.

10. Sur une citation de Laplace. Замѣчаніе по поводу одного мѣста въ книгѣ Bour'а „Cours de Mécanique et Machines".

11. Rectification. Поправка къ стр. 139 Mathesis, t III, 2-e série (1893).

12. Théoremes de géométrie élémentaire, par M. *B. Jonesco.* I. Пусть AA', BB', CC' суть высоты тр-ка ABC; A'' и B''—проэкціи точекъ A' и B' на стороны CA и CB; A''A''' и B''B''' перпендикуляры къ AB, пересѣкающіе AA' въ M и BB' въ N. Тр-ки A''MA' и NB''B' подобны тр-ку ABC и равны между собой.

II. При тѣхъ же значеніяхъ A', B', C', пусть A' проэктируется въ A'' на AC, A''—въ A''' на AB, B'—въ B'' на AB, B''—въ B''' на BC, C'—въ C'' на BC, C''—въ C''' на CA. Обозначимъ черезъ M, N, P пересѣченіе прямыхъ A''A''', B''B''', C''C''' съ AA', BB', CC'. Если $r_m$, $r_n$, $r_p$, R суть радіусы круговъ MA'A'', NB'B'', PC'C'', ABC, то

$$\frac{r_m}{\sin 2C} = \frac{r_n}{\sin 2A} = \frac{r_p}{\sin 2B} = \frac{R}{2}.$$

13. Sur les aires des figures sphériques. Библіографическія справки относительно площади сферической фигуры, ограниченной дугами малыхъ круговъ.

**Propriétés des cercles de Chasles.** Par. M. *E. N. Barisien* (Suite). (См. Обз. Math. 1895. № 6). Продолжается перечисленіе свойствъ *окружностей Chasles'я*; изъ нихъ отмѣтимъ слѣдующую теорему:

*Существуютъ восемь прямыхъ, одновременно нормальныхъ къ эллипсу и касательныхъ къ кругу, концентрическому съ нимъ.*

Для круга Chasles'я $\Sigma'$ эти восемь прямыхъ приводятся къ четыремъ; для круга $\Sigma$ прямыя эти мнимы.

**Bibliographie.** Deelbaarheid en repeteerende Breuken, door *J. Versluys.* Amsterdam. 1894.

Leçons sur les coordonnées tangentielles. Par *G. Papelier.* Paris. 1895.

Elements de Géométrie Par M Ch. Bioche. Paris. 1895.

**Solutions de questions proposées.** №№ 811; 907, 911, 912, 918, 929, 934, CCCXIII.

**Questions d'examen.** №№ 692, 693.

**Questions proposées.** №№ 1027—1030.

*Д. Е.*

# Bulletin de la Société Astronomique de France.

## 1896. № 4.

**Un Poème.** *C. Flammarion.*

**Soc. Astr. de France.** *Séance du 4 Mars 1896.*

**Horloges synchronisées de l'Observatoire de Nice.** *A. Cornu.* Весьма важно, чтобы въ обсерваторіи всѣ часы шли одинаково, а такъ какъ возможно точные часы стоятъ очень дорого и на изготовленіе ихъ идетъ очень много времени (5—6 лѣтъ), то остается запастись *одними* точными часами, управляющими ходомъ всѣхъ другихъ часовъ, т. е. дѣлающими синхроническими качанія всѣхъ маятниковъ. Въ обсерваторіи въ Ницѣ Cornu это устроилъ слѣдующимъ образомъ.

Маятникъ каждыхъ часовъ снабженъ внизу дугообразнымъ магнитомъ (центръ дуги въ точкѣ привѣса); черезъ каждыя 2 сек. магнитъ втягивается однимъ концомъ въ бобину, по которой управляющими часами посылается токъ; другой конецъ магнита движется въ мѣдной успокаивающей трубкѣ; чтобы наблюдатель былъ увѣренъ въ правильности хода своихъ часовъ, управляющіе часы между 59 и 0 секундой посылаютъ въ каждые часы сигналъ „top" по телефону.

Желая добиться возможной правильности хода управляющихъ часовъ, Корню занялся изслѣдованіемъ условій правильности хода часовъ вообще и нашелъ, что она болѣе зависитъ отъ маятника, чѣмъ отъ колеснаго механизма, что медленныя качанія правильнѣе быстрыхъ, что важно увеличить вѣсъ чечевицы, что вслѣдствіе несовершенства разныхъ системъ компенсаціи лучше всего помѣстить маятникъ въ помѣщеніе съ малыми колебаніями температуры. Маятникъ, устроенный имъ, имѣетъ въ длину 4 метра и вѣситъ 108 kg; толщина чечевицы равна половинѣ ширины, такъ какъ опытъ показалъ, что такая форма наиболѣе удобна для преодолѣнія сопротивленія воздуха; амплитуда качаній $= 1/2^0$ по ту и другую сторону вертикальной линіи; подвѣсъ пружинный; передача движенія отъ маятника къ колесамъ производится посредствомъ алюминіевой проволоки, укрѣпленной на $1/4$ длины маятника; стержень желѣзный, который при измѣненіи температуры на $1^0$ даетъ въ сутки ошибку въ $1/2''$; для компенсированья маятника на срединѣ длины имѣется полочка, на которую кладется добавочная нагрузка для ускоренія хода (для этого маятника добавочная нагрузка въ 10 g даетъ въ сутки ускореніе въ 1 сек.); во избѣжаніе внезапныхъ измѣненій температуры маятникъ помѣщенъ въ подвалѣ, гдѣ темп. въ теченіе года колеблется между $8^0$ и $10^0$.

**Les bolides du 10 Février en Espagne.** *José Comas Sola.* 10 февраля паденіе болидовъ наблюдалось на всемъ почти Пиренейскомъ полуостровѣ и на югѣ Франціи. Comas Sola приводитъ наблюденія, числомъ 16, произведенныя въ разныхъ мѣстахъ Каталоніи между 9 и 11 ч. утра. На основаніи совокупности этихъ наблюденій онъ приходитъ къ такому заключенію: въ этотъ день надъ Пиренейскимъ полуостровомъ въ направленіи съ ЮВ къ СЗ пролетѣла цѣлая туча болидовъ, изъ которыхъ многіе разрывались съ сильнымъ трескомъ. Такой выводъ подкрѣпляется тѣмъ, что болидъ, взорвавшій надъ Мадридомъ на высотѣ около 30 kg, долженъ бы быть видимымъ изъ Каталоніи на высотѣ градуса въ 3 надъ горизонтомъ, между тѣмъ какъ во многихъ мѣстахъ они были видимы очень высоко —близъ зенита; кромѣ того на это указываютъ и мѣста паденія осколковъ, различныя въ разныхъ случаяхъ. Всѣ эти болиды нельзя считать осколками одного болида, такъ какъ трудно допустить, чтобы послѣ взрыва всѣ они продолжали двигаться по одному и тому же направленію и наконецъ послѣ взрыва, какъ показываютъ раньше извѣстные случаи, осколки падаютъ на сравнительно малую поверхность.

**Analyse de la météorite tombée à Madrid.** Осколокъ Мадридскаго болида былъ доставленъ проф. St. Meunier, который его и изслѣдовалъ. Вещество его свѣтло-сѣраго цвѣта и покрыто корой — тонкой, рыжевато-черной на той сторонѣ, которою онъ двигался впередъ и болѣе толстой, совершенно черной на задней сторонѣ; въ немъ видны перекрещивающіяся жилки. Плотность при $16^0 = 3.598$. Удалось обнаружить присутствіе очень магнитныхъ металлическихъ зеренъ, состоящихъ изъ желѣзнаго и желѣзно-никкелеваго колчедановъ, желто-зеленаго изумруда (péridot), полево-шпатовыхъ породъ и горько-землистаго пироксена. По своему составу

онъ приближается къ Chantonnite'у и именно тѣмъ образчикамъ, которые упали 3 февраля 1882 г. въ Mocs въ Трансильваніи и 7-го апрѣля 1887 г. въ Lalitpur въ Индіи.

**L'éclipse partielle de Lune du 28 Février 1896.**

**L'étoile variable „Mira Ceti“.** Послѣдній maximum Mira Ceti опоздалъ мѣсяца на два противъ предсказаннаго. Послѣднія maxima вообще запаздываютъ.

**Températures annuelles des principales villes de l'Europe.** *C. Flammarion.* Таблицы и діаграммы измѣненій средней годичной температуры для нѣсколькихъ десятковъ Европейскихъ городовъ за послѣдніе 20 лѣтъ. Особенно бросаются въ глаза: сильныя колебанія для сѣверныхъ городовъ напр. $3^0,4$ для Архангельска, $4^0$ для Петербурга, неодинаковый ходъ кривыхъ для сѣверныхъ и южныхъ городовъ, такъ что одинъ и тотъ же годъ особенно холоденъ для однихъ и жарокъ для другихъ, кривыя разныхъ городовъ неодинаково согласуются съ кривой измѣненія поверхности солнечныхъ пятенъ.

**Nouvelles de la Science. Variétés.**

**Le ciel en Avril.**

*К. С.*

## 1896. №. 5.

**Assemblée générale annuelle de la Soc. Astr. de France.** На общемъ собраніи были произнесены рѣчи, резюме которыхъ слѣдуетъ.

**Les progrès de l'Astronomie.** *M. Janssen.* Наиболѣе крупными трудами въ области математической астрономіи были: таблицы Солнца, Меркурія и Венеры Ньюкомба, таблицы Юпитера и Сатурна Hill'я, курсъ небесной механики Тиссерана.— Астероидовъ открыто 12, такъ что общее ихъ число болѣе 400.—Фотографіи солнца показали, что факелы и струйки полутѣней имѣютъ зернистое строеніе, такъ что зерна (діаметръ которыхъ достигаетъ нижняго предѣла въ 0,1″) или маленькія облачка фотосферы составляютъ такой же элементъ фотосферы, какъ клѣточки — элементъ органической ткани. Солнечная дѣятельность, поскольку она выразилась въ пятнахъ и протуберанцахъ, продолжаетъ понемногу ослабѣвать особенно въ южномъ полушаріи. — По части лунныхъ фотографій наибольшаго успѣха достигли Loewy и Puiseux. Карта неба подвигается впередъ. Относительно кометы Swift'a, открытой 20 августа удалось не только доказать ея періодичность, но и съ большой вѣроятностью можно утверждать ея тождество съ пропавшей кометой Lexell'я. 17 ноября Perrin открылъ комету и 21 ноября—Brooks; поставленъ вопросъ о тождествѣ послѣней съ кометой 1652 г.—О падающихъ звѣздахъ и метеоритахъ появился прекрасный трудъ Meunier.—Относительно періода вращенія Венеры начинаетъ брать перевѣсъ мнѣніе Скіапарелли, по которому этотъ періодъ равенъ ея звѣздному году. Марсомъ болѣе другихъ занимался Lowel, обнаружившій, что появленіе каналовъ совпадаетъ съ наступленіемъ лѣта въ соотвѣтствующемъ полушаріи Марса, на основаніи чего можно предположить, что въ этомъ явленіи играетъ роль какъ вода, такъ и вызываемая ею растительность.—Много измѣреній двойныхъ звѣздъ сдѣлано Ригурданомъ. Измѣненіемъ блеска Algol'я занимался Тиссеранъ. Вопросъ объ измѣненіи географическихъ широтъ сталъ предметомъ систематическихъ и настойчивыхъ изслѣдованій. — Были произведены измѣренія напряженія тяжести въ Альпахъ. Установка приборовъ на вершинѣ Монблана закончена.

**Travaux de l'Observatoire de Juvisy.** *G. A.* Въ Juvisy Фламмаріономъ, Антоніади и Матье произведены были работы надъ опредѣленіемъ положенія полюса міра съ помощью фотографіи, надъ видимостью неосвѣщенной части Венеры, надъ полярными снѣгами Марса, дѣленіемъ колецъ Сатурна, надъ Юпитеромъ, надъ вліяніемъ различныхъ лучей спектра на растительность (мимоза подъ краснымъ стекломъ въ 15 разъ выше, чѣмъ подъ синимъ), надъ зависимостью между средней температурой и поверхностью солнечныхъ пятенъ *).

*) О всемъ этомъ въ теченіе года сообщалось.

**Travaux et progrès de la Société.** *M. Fouché* (*Ph. Gerigny*). Французское Астрономическое Общество, возникшее 28 января 1887 г. по инициативѣ Фламмаріона въ составѣ 12 членовъ, насчитываетъ теперь до 2000 членовъ и корреспондентовъ, имѣетъ свой органъ „Bul. Astr." и обсерваторію. Благодаря участію извѣстныхъ французскихъ и иностранныхъ астрономовъ, дѣятельность его все болѣе расширяется. Труды членовъ составляли содержаніе „Bul. Astron.".

**Un voyage en Indo-Chine.** *M. le Prince Henry d'Orléans.* Въ свое послѣднее путешествіе по Индо-Китаю принцъ Генрихъ Орлеанскій прошелъ 3400 km; изъ нихъ 2400—по мѣстамъ раньше не изслѣдованнымъ; вмѣстѣ съ своими спутниками Roux и Briffaud онъ измѣрилъ 6 долготъ, 40 широтъ, 11 магнитныхъ склоненій и много высотъ; кромѣ того онъ снялъ рядъ фотографій, изображающихъ главныя сцены экспедиціи, виды, типы жителей и разныя орографическія и геологическія достопримѣчательности.

**Les radiations nouvelles.** *Ch. Ed. Guillaume.* Статья представляетъ краткое изложеніе книги того же автора „Les rayons *x* et la photographie à travers les corps opaques", вышедшей въ мартѣ первымъ изданіемъ (Paris, Gauthier Villars prix 3 fr.) и въ концѣ апрѣля вторымъ; 2-е изд. содержитъ все, что извѣстно о *x*-лучахъ по 15 апрѣля (см. Révue Scient. № 19).

**Nouvelles divisions dans les anneaux de Saturne** *C. Flammarion.* Въ апрѣлѣ Антоніади замѣтилъ въ среднемъ кольцѣ Сатурна три просвѣта, изъ которыхъ средній виденъ наиболѣе отчетливо. Просвѣты въ среднемъ кольцѣ наблюдались и раньше: В. Гершелемъ въ 1780 г. de-Vico въ 1838 г., Bond'омъ — 1851 г., Coolidge'омъ въ 1855 и 1857 A. Hall'емъ въ 1875 г. и появленіе ихъ вѣроятно зависитъ отъ измѣняющагося притяженія 8 спутниковъ.

**Nouvelles de la Science. Variétés.**

13 апрѣля Swift открылъ комету къ 10 отъ Плеядъ; ядро 10 величины, хвостъ въ 2′; прошла черезъ перигелій 17 апрѣля.

Fauth, астрономъ въ Kaiserslautern, задался цѣлью опредѣлить уголъ наклона внутреннихъ скатовъ лунныхъ цирковъ; на основаніи совокупности данныхъ онъ опредѣлилъ его въ 23° среднимъ числомъ; чѣмъ діаметръ цирка больше, тѣмъ скатъ отложе, такъ что для

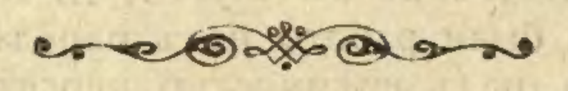
| діам. цирка | средній наклонъ |
|---|---|
| 10—30 | 33°,5 |
| 30—50 | 22°,7 |
| 50—100 | 14°,8 |
| 100—200 | 11°,6. |

Для внѣшняго ската Schmidt получилъ наклонъ гораздо меньше—3°—8°.

По изслѣдованіямъ Markwick (Гибралтаръ) послѣдніе 5 maxima звѣзды Mira Ceti запоздали на 21, 24, 30, 58 и 65 дней. Leyst на основаніи изслѣдованія магнитныхъ измѣреній въ Петербургѣ и Павловскѣ съ 1878 г. по 1889 г. пришелъ къ заключенію, что *на магнитное состояніе земли имѣютъ вліяніе планеты*, увеличивая и абсолютную величину склоненія и періодическую часть суточнаго колебанія въ то время, когда онѣ находятся на кратчайшемъ отъ земли разстояніи.

**Le ciel en Mai.**

*К. Смоличъ.*





Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 24-го Іюня 1896 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.